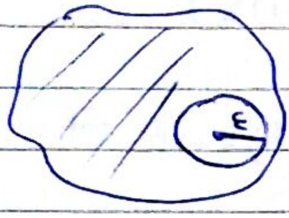
14/3/19

Η τοπολογία ενός μετρικού χώρου

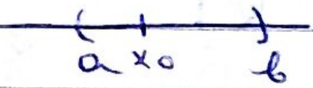
Ορισμός: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, ένα $G \subseteq X$ λέγεται ανοικτό (ή ρ-ανοικτό) (ανοικτό ως προς την μετρική ρ) αν για κάθε $x_0 \in G$ υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $B_\rho(x_0,\varepsilon) \subseteq G$



Παραδείγματα: 1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική ρ

α) Αν $a<b$ το (a,b) είναι ανοικτό

Αποδ:
Έστω $x_0 \in (a,b)$ Θέτουμε $\varepsilon=\min\{x_0-a, b-x_0\}$
τότε: $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq (a,b)$



β) Το $[a,b)$ δεν είναι ανοικτό. Τότε $a \in [a,b)$ αλλά δεν υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [a,b)$
Άρα το $[a,b)$ δεν είναι ανοικτό

γ) Το $[a,+\infty)$ είναι ανοικτό

Αποδ:
Έστω $x_0 \in [a,+\infty)$. Θέτουμε $\varepsilon = x_0 - a > 0$. Τότε:
$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq [a,+\infty)$

δ) Το $(-\infty,b)$ είναι ανοικτό

Αποδ:
Έστω $x_0 \in (-\infty,b)$. Θέτουμε $\varepsilon = b - x_0 > 0$. Τότε:
$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq (-\infty,b)$

ε) Τα σύνολα $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $\{a\}$ δεν είναι ανοικτά

στ) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό (διότι για $x_0 \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon > 0$ το $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ περιέχει και άρρητους (άρα δεν είναι υποσύνολο του $\mathbb{Q}$)

ζ) Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό (ομοίως)

2) Στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική ρ

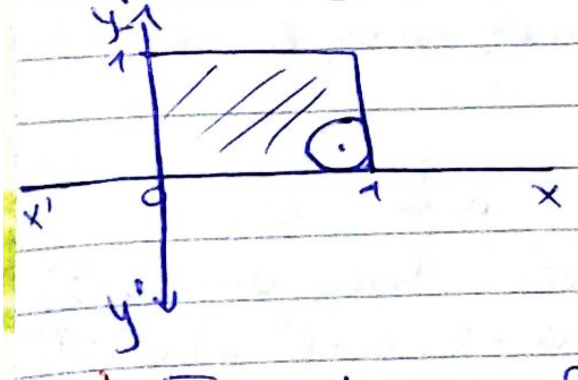
α) Το $(0,1) \times (0,1)$ είναι ανοικτό

Αποδ:

Έστω $(x_0, y_0) \in (0,1) \times (0,1)$.

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{x_0, 1-x_0, y_0, 1-y_0\} > 0$ τότε:

$B_\rho((x_0,y_0), \varepsilon) \subseteq (0,1) \times (0,1)$



β) Το σύνολο $B_\rho((0,0), \delta)$ είναι ανοικτό

Αποδ:

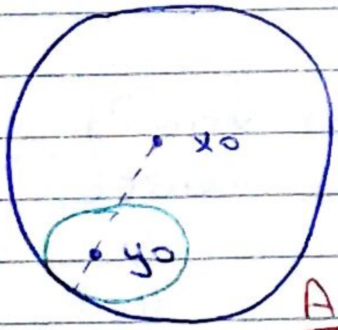
3) Αν (X, ρ) όπου ρ η διακριτή μετρική στο X

▷ Ισχυρισμός: κάθε $G \subseteq X$ είναι ανοικτό

Αποδ: Έστω $G \subseteq X$. Θα δ.ο G: ανοικτό.
Έστω $x_0 \in G$, τότε $B_\rho(x_0, 1) = \{x_0\} \subseteq G$ άρα το G είναι ανοικτό

Πρόταση: Έστω (X, ρ) τυχαίος μετρικός χώρος. Τότε κάθε ανοιχτή μπάλα του X είναι ανοικτό σύνολο.

Αποδ:
Έστω $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $B_\rho(x_0, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $y \in B_\rho(x_0, \varepsilon)$ τότε $\rho(y, x_0) < \varepsilon$. Τότε:
$\varepsilon - \rho(y, x_0) > 0$. Θέτουμε:
$\delta = \varepsilon - \rho(y, x_0)$



▷ Ισχυρισμός: $B_\rho(y, \delta) \subseteq B_\rho(x_0, \varepsilon)$

Αποδ (ισχυρισμού): Έστω $z \in B_\rho(y, \delta)$
Τότε: $\rho(z, y) < \delta$. Τότε: $\rho(z, x_0) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x_0) < \delta + \rho(y, x_0) = \varepsilon - \rho(y, x_0) + \rho(y, x_0) = \varepsilon$
άρα: $\rho(z, x_0) < \varepsilon$ δηλ. $z \in B_\rho(x_0, \varepsilon)$

Επομένως το σύνολο $B_\rho(x_0, \varepsilon)$ είναι ανοικτό

Πρόταση: (Βασικές ιδιότητες ανοικτών συνόλων)
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε:
α) Τα σύνολα $\emptyset, X$ είναι ανοικτά
β) Αν A, B είναι ανοικτά τότε το $A \cap B$ είναι ανοικτό
γ) Αν $(A_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια ανοικτών τότε το σύνολο $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοικτό

Αποδ:
α) X ανοικτό αποδ: Αν $x_0 \in X$ τότε για οποιαδήποτε $\varepsilon > 0$ $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq X$

$\emptyset$ ανοικτό (αν δεν ήταν τότε $\exists x_0 \in \emptyset$ ώστε ... άτοπο)

β) Έστω $x_0 \in A \cap B$, τότε $x_0 \in A$ και $x_0 \in B$.
Εφόσον A ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$ ώστε:
$B_\rho(x_0, \varepsilon_1) \subseteq A$
Εφόσον B ανοικτό -//- $\varepsilon_2 > 0$ -//-
$B_\rho(x_0, \varepsilon_2) \subseteq B$
Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ και $\varepsilon > 0$.
$B_\rho(x_0, \varepsilon) = B_\rho(x_0, \varepsilon_1) \cap B_\rho(x_0, \varepsilon_2) \subseteq A \cap B$

Επομένως $A \cap B$: ανοικτό

γ) Έστω $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in A_{i_0}$

Εφόσον το A_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε:
$B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{i_0}$ τότε: $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

Επομένως το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοικτό

Παρατηρήσεις: i) Από το (β) προκύπτει (χρησιμοποιώντας επαγωγή) ότι αν $A_1, \dots, A_n$ ανοικτά σύνολα ($n \in \mathbb{N}$) τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

ii) Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο τότε η τομή τους δεν είναι κατ' ανάγκη ανοικτό σύνολο

Παράδειγμα: Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε τα σύνολα $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $n = 1, 2, \dots$

τότε κάθε A_n είναι ανοικτό ενώ:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$ το οποίο δεν είναι ανοικτό

Ορισμός Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια τ υποσυνόλων του X καλείται τοπολογία αν ισχύουν τα εξής:

α) $\emptyset, X \in \tau$

β) Αν $A, B \in \tau$ τότε $A \cap B \in \tau$

γ) Αν $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια στην τ τότε $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Σημείωση: Αν (X, ρ) μ.χ και συμβολίσουμε με τ_ρ την οικογένεια των ρ-ανοικτών συνόλων τότε η τ_ρ είναι τοπολογία.

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ένα $F \subseteq X$ λέγεται κλειστό (ως προς ρ) (η ρ-κλειστό) αν το $X - F$ είναι ανοικτό (ως προς ρ)

Παραδείγματα: 1) Σε κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.

Έστω $F=\{x\}$ ένα μονοσύνολο. Για να δ.ο. το F είναι κλειστό αρκεί να δ.ο το $G=X\setminus\{x\}$ είναι ανοικτό.

Έστω $y\in X\setminus\{x\}$ τότε $y\neq x \Rightarrow \rho(y,x)>0$.

Θέτω $\varepsilon=\rho(y,x)$ τότε $B_\rho(y,\varepsilon)\subseteq X\setminus\{x\}$

2) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

→ Το $(-\infty,a]$ είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμα του δηλ. το $(a,+\infty)$ είναι ανοικτό

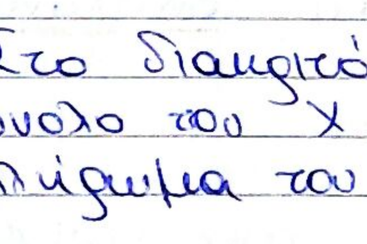
→ Αν $a<b$ το $[a,b]$ είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμα του δηλ. το σύνολο $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ είναι ανοικτό

3) Στο διακριτό μετρικό χώρο (X,ρ) κάθε υποσύνολο του X είναι κλειστό (διότι το συμπλήρωμα του είναι ανοικτό)

Πρόταση: Σε κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) οι κλειστές μπάλες είναι κλειστά σύνολα.

Αποδ:

Έστω $x_0\in X$, $\varepsilon>0$. Θα δ.ο. η κλειστή μπάλα $\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $X\setminus\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο.



Έστω $y \in X \setminus \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ τότε $\rho(y,x_0) > \varepsilon$

Θέτουμε $\delta = \rho(y,x_0) - \varepsilon$ τότε $\delta > 0$

Ισχυρισμός: $B_\rho(y,\delta) \subseteq X \setminus \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$

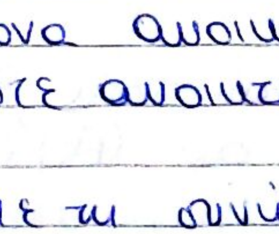
απόδ(ισχυρισμού)

Έστω $z \in B_\rho(y,\delta) \Rightarrow \rho(z,y) < \delta$. Θέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $z \in \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ τότε $\rho(z,x_0) \leq \varepsilon$. Συνεπώς,

$$\rho(y,x_0) \leq \rho(y,z) + \rho(z,x_0) = \rho(z,y) + \rho(z,x_0) < \delta + \varepsilon = \rho(y,x_0) - \varepsilon + \varepsilon = \rho(y,x_0)$$

Έστω $\rho(y,x) < \rho(y,x_0)$ άτοπο. Επομένως: $z \in X \setminus \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης. Επομένως: $X \setminus \hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοιχτό άρα το $\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)$ είναι κλειστό.

Παράδειγμα: Στο $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική το σύνολο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} = \hat{B}_\rho((0,0),1)$ είναι κλειστό



Παρατήρηση: Τα σύνολα δεν είναι "πόρτες". Μπορεί να είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά. Μπορεί να μην είναι ούτε ανοιχτά ούτε κλειστά.

(π.χ) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

→ Τα $\emptyset, \mathbb{R}$ είναι και ανοιχτά και κλειστά

→ Το $(0,1]$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

Πρόταση: (Ιδιότητες των κλειστών συνόλων)
Έστω (X, ρ) μ.χ.

α) Τα $\emptyset, X$ είναι κλειστά

β) Αν A, B είναι κλειστά τότε $A \cup B$ είναι κλειστό

γ) Αν $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών συνόλων τότε το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστά

Αποδ: α) Το $\emptyset$ είναι κλειστό διότι το $X \setminus \emptyset = X$ είναι ανοικτό
Το X είναι κλειστό διότι το $X \setminus X = \emptyset$ είναι ανοικτό

β) Αν A, B κλειστά τότε $X \setminus A$, $X \setminus B$ είναι ανοικτά άρα: $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ είναι ανοικτό δηλ. $X \setminus (A \cup B)$ είναι ανοικτό άρα το $A \cup B$ είναι κλειστό.

γ) Αν $(F_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια κλειστών τότε $X \setminus F_i$ είναι ανοικτό $\forall i \in I$.
άρα: $\bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$ είναι ανοικτό δηλ.

$X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$ είναι ανοικτό, άρα το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό.

Παρατήρηση: i) Χρησιμοποιώντας το (β) με επαγωγή προκύπτει ότι αν $(A_i)_{i=1}^{n}$ είναι κλειστά τότε $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ είναι κλειστό.

ii) Αν F_i κλειστό $\forall i \in I$ δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι το $\bigcup_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό.

Π.χ.) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τα σύνολο $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ είναι κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$ αλλά το $\bigcup_{n=1} F_n = (0,1]$ δεν είναι κλειστό

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος με $A \subseteq X$

α) Ένα $x_0 \in X$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A$

β) Το εσωτερικό του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A.

Το εσωτερικό του A συμβολίζεται με A° ή $\text{int}(A)$, $A^\circ = \text{int}(A) = \{x_0 \in X : \exists\, \varepsilon > 0\ B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A\}$ (ή $\text{int}_\rho(A)$)

Παραδείγματα: 1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$

$[a,b)^\circ = (a,b)$

$[a,b]^\circ = (a,b)$

$(a,b]^\circ = (a,b)$

$[a,b) = (a,b)$

$\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$

$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \varnothing$

2) Στο $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική ℓ

$([0,1] \times [0,1])^\circ = (0,1) \times (0,1)$

$(\hat{B}_\rho((x_0,y_0), \varepsilon))^\circ = B_\rho((x_0,y_0), \varepsilon)$

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ.

(i) Για κάθε $A \subseteq X$, $A^{\circ} \subseteq A$

(ii) Για κάθε $A \subseteq X$ το A° είναι ανοικτό και μάλιστα είναι το μέγιστο ανοικτό που περιέχεται

(iii) Αν $A \subseteq B$ τότε $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$

(iv) $A = A^{\circ} \Leftrightarrow$ το A είναι ανοικτό

(v) $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

[$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$ αλλά δεν ισχύει πάντα η ισότητα]

Απόδειξη: i) Έστω $x_0 \in A^{\circ}$ τότε $\exists \varepsilon > 0$ $B_\rho(x_0,\varepsilon) \subseteq A$ τότε αφού $x_0 \in B_\rho(x_0,\varepsilon)$ έχουμε $x_0 \in A$

ii) Για κάθε $x \in A^{\circ}$ υπάρχει $\varepsilon > 0$: $B_\rho(x_0,\varepsilon) \subseteq A$
άρα: $x \in B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq \bigcup\{V : V \text{ ανοικτό } V \subseteq A\}$

Συνεπώς, $A^{\circ} \subseteq \bigcup\{V, V : \text{ανοικτό } V \subseteq A\}$

Αντίστοιχα, αν $x \in \bigcup\{V : V \text{ ανοικτό } V \subseteq A\}$ τότε υπάρχει V ανοικτό με $V \subseteq A\}$
Τότε $\exists \varepsilon > 0$: $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq V \subseteq A$ Άρα $x \in A^{\circ}$

Επομένως $A^{\circ} = \bigcup\{V : V \text{ ανοικτό } V \subseteq A\}$
Ειδικότερα το A° είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών.

iii) Αν $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ τότε $\underset{\uparrow \text{ανοικτό}}{A^{\circ}} \subseteq A \subseteq B$
Άρα $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ με βάση το ii)

iv) ($\Rightarrow$) Εφόσον $A = A^\circ$ και A°: ανοικτό
προκύπτει ότι A: ανοικτό

($\Leftarrow$) Αν το A είναι ανοικτό τότε $\forall x \in A \ \exists \ \varepsilon > 0$
ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq A$ άρα $x \in A^\circ$ έτσι $A \subseteq A^\circ$ $\Big| \Rightarrow$
Εφόσον $A^\circ \subseteq A$ (ισχύει πάντα)
$\Rightarrow$ προκύπτει $A = A^\circ$

v) $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \stackrel{iii)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \\ (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ \end{array} \Big| \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

Επίσης, $\left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \\ B^\circ \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$ με $A^\circ \cap B^\circ$ να είναι ανοικτό
άρα: $(A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B)$ Άρα: $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \\ B \subseteq A \cup B \Rightarrow B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ}$$

Παρατήρηση: Δεν ισχύει πάντα ότι $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$
(π.χ.) στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική
$A = (-1, 0]$, $B = [0, 1)$ τότε $A^\circ \cup B^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1)$
ενώ $A \cup B = (-1, 1)$, $(A \cup B)^\circ = (-1, 1)$